

# Der de-Sitter-Raum

Christian Blohm

6. Februar 2002

Die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie lassen sich um eine kosmologische Konstante erweitern. Als einfachstes Modell eines Universums mit positiver kosmologischer Konstante findet sich unter den Annahmen des kosmologischen Prinzips und der Masselosigkeit der de-Sitter-Raum. Ich werde einige Eigenschaften dieses Raumes erläutern und auf neuere Beobachtungen eingehen, die nahelegen, daß unser Universum tatsächlich eine nichtverschwindende kosmologische Konstante besitzt und sich somit asymptotisch wie der de-Sitter-Raum verhält.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Einsteinschen Feldgleichungen und die kosmologische Konstante</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Die Friedmann-Gleichung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Das de-Sitter-Modell</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Der de-Sitter-Raum als Hyperboloid</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Die kausale Struktur des de-Sitter-Raumes</b>	<b>6</b>
5.1	Penrose-Diagramm . . . . .	6
5.1.1	Der Minkowski-Raum . . . . .	6
5.1.2	Der de-Sitter-Raum . . . . .	7
5.2	Horizonte . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Bezug zu Beobachtungsdaten</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>14</b>

# 1 Die Einsteinschen Feldgleichungen und die kosmologische Konstante

Die ursprünglichen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie lauten (hier und im weiteren gilt  $c = G = 1$ , griechische Indizes laufen von 0–3, lateinische von 1–3):

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Sie stellen ein System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen für die Metrik und ihre ersten beiden Ableitungen dar. Das macht es sehr schwer, sie zu lösen. Einstein selbst erwartete zunächst, daß man niemals in der Lage sein würde, eine exakte Lösungen zu finden ([4], S. 170), was jedoch bereits im Jahr nach ihrer Aufstellung Schwarzschild gelang.

Einstein erkannte bald, daß diese Gleichungen das Machsche Prinzip verletzen (u.a., weil sie den Minkowski-Raum als Lösung zuließen, was Raum und Trägheit ohne die Anwesenheit anderer Körper bedeutet hätte) und kein statisches Universum zulassen würden, was damals ein Paradigma war. Dies war 1917 Anlaß für ihn, die Freiheit zu nutzen, die Gleichungen um eine zusätzlichen, in  $g_{\mu\nu}$  linearen Term zu erweitern, die sogenannte kosmologische Konstante<sup>1</sup>  $\Lambda$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Für ein so eingeführtes  $\Lambda$  folgt die Konstanz direkt aus den Feldgleichungen. Als Form der Energieerhaltung verschwindet nämlich die Divergenz des Energie-Impulstensors  $T_{\mu\nu}$ . Der Einsteintensor  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$  ist von vornherein so konstruiert, daß seine Divergenz identisch Null ist. Also ist die der Gradient von  $\Lambda$  Null, woraus die Konstanz der kosmologischen Konstanten folgt.

Auch mit einer genau eingestellten kosmologischen Konstante läßt sich jedoch höchstens ein instabiles statisches Universum erreichen. Diese Tatsache zusammen mit der kurz darauf erfolgenden Beobachtung, daß das Universum tatsächlich expandiert, veranlaßte Einstein, die Einführung der kosmologischen Konstanten als großen Fehler zu sehen. 1923 schrieb er an Herrmann Weyl [14]:

De Sitter laufen zwei genügend voneinander entfernte materielle Punkte beschleunigt auseinander. Wenn schon keine quasi-statische Welt, dann fort mit dem kosmologischen Glied.

Gegenwärtig sieht es jedoch so aus, als käme man bei der Beschreibung des Weltalls nicht um ein positives  $\Lambda$  herum (siehe Abschnitt 6). Jedoch sind große Werte experimentell ausgeschlossen, da sich bis mindestens zur Größenordnung unseres Sonnensystems die Verhältnisse bis an die Grenzen der Meßbarkeit ohne kosmologische Konstante beschreiben lassen. Erst bei sehr großen – „kosmischen“ – Größenordnungen darf ein etwaiges  $\Lambda$  mit der Wirkung einer gravitativen Abstoßung ins Gewicht fallen.

## 2 Die Friedmann-Gleichung

Die Feldgleichungen lassen sich nur unter der Annahme von weitgehenden Symmetrien exakt lösen. Für die Kosmologie ist eine gängige Annahme die völlige Isotropie und Homogenität, das sogenannte kosmologische Prinzip. Dies ist stark vereinfachend, wie sich jeder bei einem Blick aus

---

<sup>1</sup>Gewissermaßen ist es formal sogar eine Notwendigkeit, den  $\Lambda$ -Term einzuführen. Im Gegensatz zu den meisten anderen physikalischen Theorien sind in der Gravitationstheorie nicht nur Energieunterschiede von Bedeutung, sondern auch absolute Energiedichten eines Systems. Diese erhält man nur, wenn man dem Vakuum eine Energiedichte zuweist (und sei sie Null, was einer verschwindenden kosmologischen Konstanten entspräche), die sich in  $\Lambda$  ausdrückt.

Jedoch ist die Interpretation als Vakuumenergiedichte der QFT problematisch, weil sie in dem Falle um etwa 120 Größenordnungen höher sein müßte. Diese Diskrepanz stellt ein großes, noch ungelöstes Problem der Theoretischen Physik dar.

dem Fenster überzeugen kann, doch hofft man, zumindest einige prinzipielle Eigenschaften des Universums damit beschreiben zu können. Die Metrik, die dem kosmologischen Prinzip gehorcht, ist die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik (FRWM, manchmal auch nur als Robertson-Walker-Metrik bezeichnet):

$$ds^2 = dt^2 - S(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $k = 1, -1, 0$  positiv gekrümmten, negativ gekrümmten oder flachen Raum.  $S(t)$  ist der kosmische Skalenfaktor, der für  $|k| = 1$  identisch dem Krümmungsradius des Raumes ist.

Die Materie des Universums betrachtet man gerne als ideale Flüssigkeit, für die aus der relativistischen Hydrodynamik der Energie-Impulstensor

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (4)$$

kommt. Sie wird also vollständig durch ihre Massendichte  $\rho$  und ihren Druck  $p$  bestimmt.

Setzt man diesen Energie-Impuls-Tensor zusammen mit der FRWM (3) in die Feldgleichungen (2) ein, schnurren sich nach langer Rechnerei letztere zu lediglich zwei unabhängigen Gleichungen zusammen:

$$3\ddot{S} = -4\pi(\rho + 3p)S + \Lambda S, \quad (5)$$

$$3\dot{S}^2 = 8\pi\rho S^2 + \Lambda S^2 - 3k. \quad (6)$$

Setzt man eine geeignete Zustandsgleichung für den Zusammenhang von Dichte und Druck an, erhält man aus diesen Gleichungen die Friedmanngleichung:

$$\dot{S}^2 - \frac{M}{S} - \frac{1}{3}\Lambda S^2 = -k, \quad (7)$$

wobei  $M$  eine aus der betrachteten Zustandsgleichung stammende Konstante ist, die den Effekt Strahlungs- und Materiedichte vereinigt. Ihre genaue Zusammensetzung interessiert an dieser Stelle nicht, da in den weiteren Betrachtungen  $M = 0$  vereinfachend angenommen wird.

Die Friedmanngleichung bestimmt die Dynamik des Kosmos unter den gemachten Annahmen. Kosmologische Modelle, die von der Friedmanngleichung beschrieben werden, nennt man Robertson-Walker-Friedmann-Lemaître-Modelle (wobei in der Literatur die Namen in nahezu beliebigen Kombinationen auftauchen können). Sie hat die Form einer mechanischen Bewegungsgleichung (kinetische Energie  $\dot{R}^2$ , Potential  $-\frac{M}{S} - \frac{1}{3}\Lambda S^2$ , Gesamtenergie  $-k$ ), wobei schon jetzt erkannt werden kann, daß für große  $S$  der  $\Lambda$ -Term unabänderlich dominiert. Deshalb verhalten sich auch Modelle mit Materie ab einer kritischen Größe asymptotisch wie die Vakuumlösungen, sofern es eine positive kosmologische Konstante gibt.

### 3 Das de-Sitter-Modell

Das Friedmannmodell mit  $\rho = p = M = 0$  und  $\Lambda > 0$  nennt man de-Sitter-Modell.<sup>2</sup> Setzt man auch noch die Krümmung  $k = 0$ , erhält man aus Gleichung (7)

$$\frac{\dot{S}}{S} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (9)$$

was sich sofort integrieren läßt:

$$S = S_0 e^{Ht}, \quad H := \frac{\dot{S}}{S} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (10)$$

<sup>2</sup>Die 1917 eigentlich von de-Sitter veröffentlichte Lösung entspricht diesem, sieht jedoch durch andere Koordinatenwahl statisch aus [9]:

$$ds^s = \frac{1}{\cosh^2 Hr} (dt^2 - dr^2 - H^{-2} \tanh^2 Hr (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (8)$$

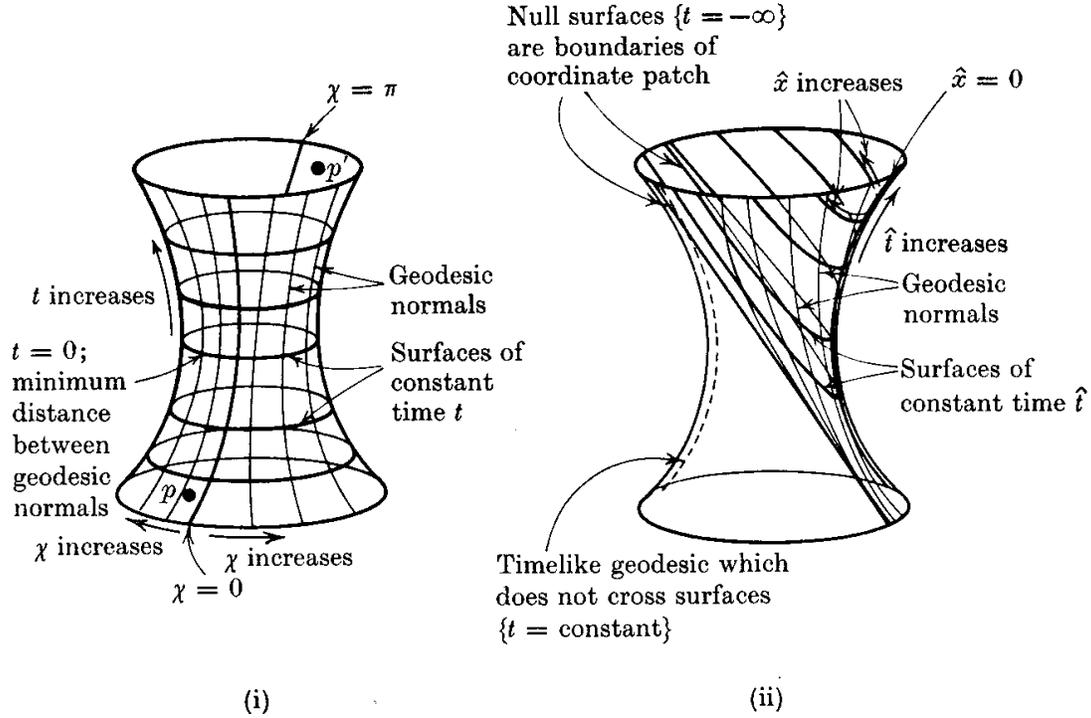


Abbildung 1: Die de-Sitter-Raumzeit als Hyperboloid im fünfdimensionalen Minkowski-Raum (zwei Dimensionen unterdrückt) ((i): Globale Koordinaten, (ii): Planare Koordinaten) [2]

Dabei bezeichnet  $H$  den Hubble-Parameter. Die Integrationskonstante  $S_0$  kann weggelassen werden, da die Freiheit der Nullpunktswahl besteht.

Diese Raumzeit ist das einfachste de-Sitter-Modell und wird aufgrund der typischen Eigenschaft der inflationären Expansion auch später als Beispiel dienen.

## 4 Der de-Sitter-Raum als Hyperboloid

Eine anderer Zugang zum de-Sitter-Raum besteht in seiner Veranschaulichung als Hyperfläche im fünfdimensionalen Minkowski-Raum. Und zwar läßt er sich hier als Hyperboloid (Abbildung 1) darstellen, dessen Oberfläche durch folgende Gleichung definiert wird:<sup>3</sup>

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = \frac{1}{H^2}. \quad (11)$$

Auf ihm gilt die Metrik

$$ds^2 = dX_0^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 - dX_4^2. \quad (12)$$

Das Interessante ist nun, daß die Friedmannmodelle durch geeignete Wahl der Koordinaten so beschrieben werden können, daß sie einen Teilraum dieses Hyperboloiden bilden. Wie man die FRWM

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (13)$$

zu transformieren hat, hängt vom Wert von  $k$  ab.

<sup>3</sup>Dreht man die Vorzeichen von  $X_4^2$  und  $H^{-2}$  um, erhält man den Anti-de-Sitter-Raum, der konstant negative Krümmung aufweist.

**Räumlich flaches Friedmann-Universum,  $k = 0$ :**

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)d\vec{x}^2 \quad (14)$$

Dies erhalte ich, wenn ich den Hyperboloiden in folgenden Koordinaten betrachte (bzw. den halben Hyperboloiden, da diese Koordinaten ihn nicht vollständig überdecken):

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H} \sinh Ht + \frac{1}{2} H e^{Ht} (x^2 + y^2 + z^2) \\ X_1 &= e^{Ht} x \\ X_2 &= e^{Ht} y \\ X_3 &= e^{Ht} z \\ X_4 &= \frac{1}{H} \cosh Ht - \frac{1}{2} H e^{Ht} (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \quad (15)$$

Ich setze dies in Gl. (12) ein und finde:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \Rightarrow \quad S(t) = e^{Ht}. \quad (16)$$

Diese Koordinaten beschreiben also einen flachen, exponentiell expandierenden Raum. Daher nennt man sie auch „planare Koordinaten“.

**Geschlossenes Friedmann-Universum,  $k = 1$ :**

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} r &= \sin \chi \\ \frac{dr}{d\chi} &= \cos \chi \\ dr^2 &= \cos^2 \chi d\chi^2 \\ &= (1 - \sin^2 \chi) d\chi^2 \end{aligned}$$

ergibt sich aus der FRWM:

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \quad (17)$$

Diese Metrik ist das Ergebnis, wenn ich auf dem Hyperboloiden folgende Koordinaten einführe (die ihn vollständig überdecken, weshalb sie auch „globale Koordinaten“ genannt werden):

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \\ X_1 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \cos \chi \\ X_2 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \sin \chi \cos \theta \\ X_3 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ X_4 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \sin \chi \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (18)$$

Dann folgt nämlich:

$$ds^2 = dt^2 - \left( \frac{\cosh Ht}{H} \right)^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \quad (19)$$

In diesen Koordinaten sieht der de-Sitter-Raum aus wie eine 3-Sphäre, die bei  $t = -\infty$  unendlich groß ist, zu minimaler Größe bei  $t = 0$  schrumpft und dann wieder exponentiell zu unendlicher Größe mit  $t \rightarrow \infty$  expandiert.

**Offenes Friedmann-Universum,  $k = -1$ :**

Analog kommt man auf

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \infty. \quad (20)$$

Der Bezug zum de-Sitter-Raum wird durch folgende Koordinatenwahl (wieder nicht der ganze Hyperboloid) klar:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \cosh \chi \\ X_1 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \\ X_2 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \sinh \chi \cos \theta \\ X_3 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ X_4 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (21)$$

Man findet die Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - \left( \frac{\sinh Ht}{H} \right)^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \infty. \quad (22)$$

Alle drei Universen expandieren beschleunigt und haben für große  $t$  asymptotisch das gleiche Verhalten.

Man kann also zeigen, daß die Raum-Zeit-Geometrie in allen drei Fällen für  $k = \pm 1, 0$  bei gleichem Wert für  $\Lambda$  die gleiche ist, ihre hohe Symmetrie (der de-Sitter-Raum unterliegt der Symmetriegruppe  $SO(4, 1)$  und ist maximal symmetrisch) es jedoch ermöglicht, auf drei verschiedene Arten raumartige Schnitte durchzulegen, die konstante Krümmung besitzen, nämlich 3-Sphären, 3-Ebenen und 3-Hyperboloiden.

Eine gewisse Analogie besteht zu den bekannten Kegelschnitten.

## 5 Die kausale Struktur des de-Sitter-Raumes

### 5.1 Penrose-Diagramm

Um die kausale Struktur von Raumzeiten zu untersuchen, eignen sich sehr gut sogenannte Penrose-Diagramme. Hierbei führt man Koordinaten ein, die räumliche und zeitliche Unendlichkeiten auf endliche Werte projizieren, so daß die Raumzeit kompaktifiziert wird und vollständig in einem intuitiv verständlichen Diagramm untersucht werden kann. Insbesondere liegt jede zeitartige, raumartige oder Nullkurve vollständig im Diagramm. Natürlich geht dabei viel Information über die Geometrie verloren und dieses Verfahren funktioniert nur bei einigen wenigen Raumzeiten mit hoher Symmetrie.

#### 5.1.1 Der Minkowski-Raum

Um die Besonderheiten der kausalen Struktur des de-Sitter-Raumes zu erkennen, ist es hilfreich, sich zunächst das Penrose-Diagramm des gewöhnlichen Minkowskiraumes anzusehen. Man erhält

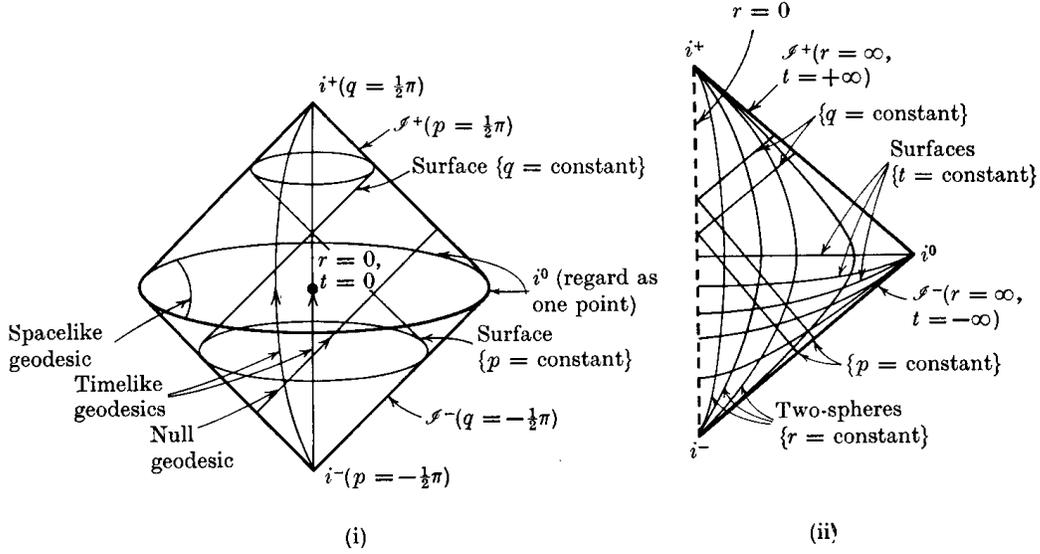


Abbildung 2: Penrose-Diagramm der Minkowski-Raumzeit [2]

es, indem man folgende Koordinaten einführt:

$$p = \arctan v = \arctan(t + r), \quad -\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2},$$

$$q = \arctan w = \arctan(t - r), \quad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}.$$

Nun tauchen die verschiedenen Unendlichkeiten der Raumzeit bei endlichen Werten von  $p$  und  $q$  auf und können benannt werden:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \text{lichtartige Zukunftsunendlichkeit } \mathcal{I}^+ &\rightsquigarrow p = \frac{\pi}{2} \\ \text{lichtartige Vergangenheitsunendlichkeit } \mathcal{I}^- &\rightsquigarrow q = -\frac{\pi}{2} \\ \text{zeitartige Zukunftsunendlichkeit } i^+ &\rightsquigarrow p = q = \frac{\pi}{2} \\ \text{zeitartige Vergangenheitsunendlichkeit } i^- &\rightsquigarrow p = -q = \frac{\pi}{2} \\ \text{raumartige Unendlichkeit } i^0 &\rightsquigarrow p = q = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Im Diagramm 2 ist nun  $q$  über  $p$  aufgetragen. Anschließend wurde das ganze um  $45^\circ$  gekippt. Zwei Dimensionen wurden dabei unterdrückt, so daß jeder Punkt, der nicht auf den Begrenzungslinien liegt, eine Kugeloberfläche repräsentiert. Die Raumzeit läßt sich nun in räumliche Hyperflächen gleicher Zeit aufteilen, die sich jeweils bis ins räumlich unendliche  $i^0$  erstrecken. Geschnitten werden diese Hyperflächen von zeitartigen Geodäten, die alle von  $i^-$  nach  $i^+$  führen. Lichtstrahlen bewegen sich auf Nullgeodäten in Winkeln von  $45^\circ$  und beginnen somit auf  $\mathcal{I}^-$  oder enden auf  $\mathcal{I}^+$ .

### 5.1.2 Der de-Sitter-Raum

Auch im de-Sitter-Raum kann man konforme Koordinaten einführen. Dabei geht man von den globalen Koordinaten aus und führt eine Zeit  $-\pi/2 < T < \pi/2$  gemäß

$$\cosh Ht = \frac{1}{\cos T} \tag{23}$$

<sup>4</sup>Das Zeichen  $\mathcal{I}$  spricht sich *scri* ( $\hat{=}$  Script I) aus.

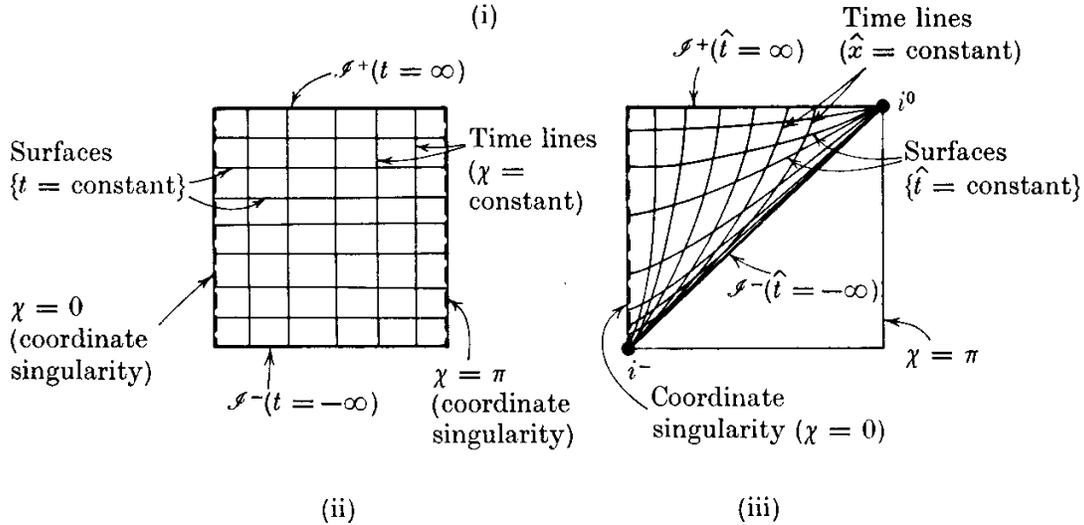


Abbildung 3: Penrose-Diagramm der de-Sitter-Raumzeit ((i): bitte ignorieren, (ii): Globale Koordinaten, (iii): Planare Koordinaten) [2]

ein. In diesen Koordinaten hat die Metrik die Form

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 T}(-dT^2 + d\Omega^2). \quad (24)$$

Für das Penrose-Diagramm interessieren vor allem die Nullgeodäten, die dann auch in der Metrik

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + d\Omega^2 \quad (25)$$

Nullgeodäten sein müssen. So ausgerüstet findet man das Penrose-Diagramm für die de-Sitter-Raumzeit, Abbildung 3. Jeder Beobachter bewegt sich von  $\mathcal{I}^-$  nach  $\mathcal{I}^+$ . Nullgeodäten (Lichtstrahlen) laufen auch hier wieder in einem Winkel von  $45^\circ$ , so daß sofort ersichtlich ist, daß ein Beobachter am „Nordpol“ (linke Koordinatensingularität bei  $\chi = 0$ ) nie Informationen zum „Südpol“ (rechte Koordinatensingularität bei  $\chi = \pi$ ) und umgekehrt schicken kann.

## 5.2 Horizonte

Im de-Sitter-Raum gibt es beobachterabhängige Horizonte. Im Gegensatz zum Minkowski-Raum wird ein geodätisch bewegter Beobachter nie Kenntnis über den gesamten Raum erlangen. Es gibt Ereignisse, die zu keinem Zeitpunkt in seinem Vergangenheits- oder Zukunftslichtkegel liegen, die also keinerlei kausale Verbindung zu ihm aufweisen.

Man unterscheidet zwei Arten von Horizonten: Teilchen- und Ereignishorizont.

Der Teilchenhorizont (particle horizon) eines Beobachters  $O$  ist die Fläche, die zwischen den Teilchen, von denen  $O$  Kenntnis hat, und denen, die  $O$  nicht sehen kann, unterscheidet. Im Falle des Minkowski-Raumes ist  $\mathcal{I}^-$  Null, so daß alle Teilchen von  $O$  gesehen werden. Ist  $\mathcal{I}^-$  jedoch raumartig, wie in Abbildung 4 dargestellt, so gibt es zu jedem Zeitpunkt Teilchen, die  $O$  noch nie gesehen hat.

Für den Zukunftseignishorizont (future event horizon) betrachtet man die gesamte Geschichte eines Beobachters  $O$ , indem man sich den Vergangenheitslichtkegel bei  $\mathcal{I}^+$  anschaut. Ist  $\mathcal{I}^+$  raumartig (wie im Falle des de-Sitter-Raums), so gibt es Ereignisse, von denen  $O$  prinzipiell niemals Kenntnis erlangen kann. Denn das Licht dieser Ereignisse gelangt zu  $O$  auf Nullgeodäten mit

$$ds^2 = 0.$$

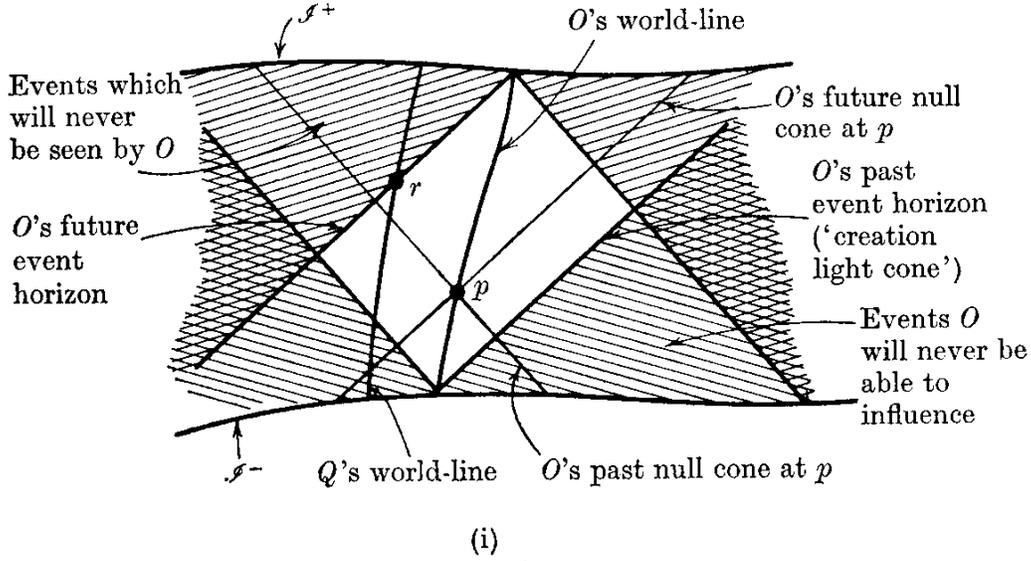


Abbildung 4: Teilchenhorizont eines Beobachters in der dS-Raumzeit [2]

Daraus folgt mit der FRWM (3)

$$dr = \pm e^{-Ht} dt \quad (\text{o.B.d.A. } \rho = \phi = 0). \quad (26)$$

Um die Form des Ereignishorizonts zu bestimmen, interessieren Lichtstrahlen, die zum Zeitpunkt  $t_0 \rightarrow \infty$  bei  $r_0 = 0$  ankommen:

$$\begin{aligned} \int_r^0 dr' &= \int_0^\infty dt' \frac{1}{H} e^{-Ht'} \\ r(t) &= \frac{1}{H} e^{-Ht} \end{aligned} \quad (27)$$

Gleichung (27) beschreibt nun eine Hyperfläche, die den Ereignishorizont für  $O$  darstellt. Von Ereignissen außerhalb dieses Horizonts wird  $O$  niemals erfahren, Ereignisse in der Nähe dieses Horizonts erscheinen rotverschoben und sehr leuchtschwach.

Der Charakter dieses Horizonts ist somit vergleichbar mit dem Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs, auch wenn er nicht absolut, sondern beobachterabhängig ist. Dennoch versucht man, gewisse Konzepte von Schwarzen Löchern auch auf den de-Sitter-Horizont zu übertragen. Insbesondere sollte das Entropie-Flächengesetz

$$S = \frac{A}{4G} \quad (28)$$

von Bekenstein und Hawking, welches die Fläche eines Ereignishorizontes  $A$  mit der Entropie  $S$  verknüpft ( $G$  ist die Gravitationskonstante), auch hier eine Bedeutung haben (für Näheres siehe beispielsweise Referenz [11] oder [12]).

Ein solcher Horizont tritt beim Minkowskiraum nur auf, wenn sich der Beobachter  $O$  nicht geodätisch, sondern mit konstanter Beschleunigung bewegt.

## 6 Bezug zu Beobachtungsdaten

Lange Zeit hielt man aus theoretischen Gründen, und weil es keine dem widersprechenden experimentellen Anzeichen gab, für die kosmologische Konstante einen Wert von  $\Lambda = 0$  für wahrscheinlich, auch wenn der kosmologische Term nie ganz aus der Diskussion geriet. Erst innerhalb der

letzten fünf Jahre scheint es solidere Anzeichen dafür zu geben, daß  $\Lambda$  tatsächlich einen positiven, zwar kleinen, aber von Null verschiedenen Wert besitzt.

Wichtigstes Beobachungskriterium dabei ist die Vermessung des Kosmos mit Supernovae vom Typ Ia. Sie erlauben es aufgrund ihrer Leuchtkraft nämlich einerseits, sehr weit in den Raum hinein (etwa 500 Mpc) und damit in die Vergangenheit zu sehen, andererseits eignen sie sich aufgrund ihrer physikalischen Struktur als sogenannte Standardkerzen, das heißt, ihre Leuchtkraft liegt meist innerhalb eines bestimmten, recht engen Rahmens. Dies läßt sich folgendermaßen erklären: Typ-Ia-Supernovae ereignen sich in Doppelsternsystemen, die aus einem Weißen Zwerg und einem großen Stern geringer Dichte bestehen. Von letzterem strömt so lange Materie auf den Begleiter, bis die kritische Chandrasekhar-Masse erreicht wird, bei welcher der Zwergstern instabil wird. Unter stets gleichen Zündbedingungen wird somit bei einer thermonuklearen Explosion in kurzer Zeit eine große Menge Energie nach einem charakteristischen Muster frei.

Daher eignen sich die Supernovae des Typ Ia hervorragend zur Bestimmung großer kosmischer Entfernungen, wenn der Verlauf der kosmischen Expansion bekannt ist. Anders ausgedrückt deutet es in diesem Fall auf Widersprüche in der Theorie der Geschichte des Weltalls hin, wenn die Supernovae weniger hell sind, als aufgrund ihrer kosmologischen Rotverschiebung erwartet wurde. Zwar gibt es auch andere denkbare Erklärungen, doch hat die Vermutung, daß das All früher langsamer als gedacht expandierte, die größte Anhängerschaft. Da wir die heutige Expansionsrate besser kennen, kann man folgern, daß sich die Expansion also weniger stark abbremst, als erwartet, oder sich wahrscheinlich sogar beschleunigt. Dies wiederum ist auch eine Eigenschaft eines Modells mit positiver kosmologischer Konstante.

Wie die Daten im einzelnen zu verschiedenen Parametern von  $\Omega_\Lambda$  und  $\Omega_M$  passen, zeigen die Abbildungen 5 und 6. Dabei bezeichnet  $\Omega$  jeweils das Verhältnis von Dichte  $\rho$  zu kritischer Dichte<sup>5</sup>  $\rho_{\text{krit}}$ . Dabei entspricht die kosmologische Konstante einer Massendichte von  $\rho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ .

Zusammengefaßt gilt also

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{\text{krit}}}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{krit}}} = \frac{\Lambda}{3} H_0^2, \quad (29)$$

so daß die Bedingung für flachen Raum formuliert werden kann als:

$$1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda = \Omega_K = 0. \quad (30)$$

Gegen eine andere mögliche Erklärung der „zu dunklen“ Supernovae, nämlich daß der Raum nicht flach, sondern negativ gekrümmt ist, sprechen Untersuchungen der Anisotropie in der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung. Legt man das Modell eines inflationären Universums zugrunde, ergeben sich unter der Annahme eines flachen Raumes Voraussagen für die Winkelgrößen der Strukturen in der Hintergrundstrahlung. Ihre Größe wird gegenwärtig recht gut durch Beobachtungen bestätigt. Eine signifikante Krümmung hätte Abweichungen des Öffnungswinkels, in dem wir die Strukturen sehen können, zur Folge, da sich geschlossene Räume fokussierend auf Lichtstrahlen auswirken und offene genau umgekehrt. Solche Abweichungen wurden nicht beobachtet (Abbildung 7).

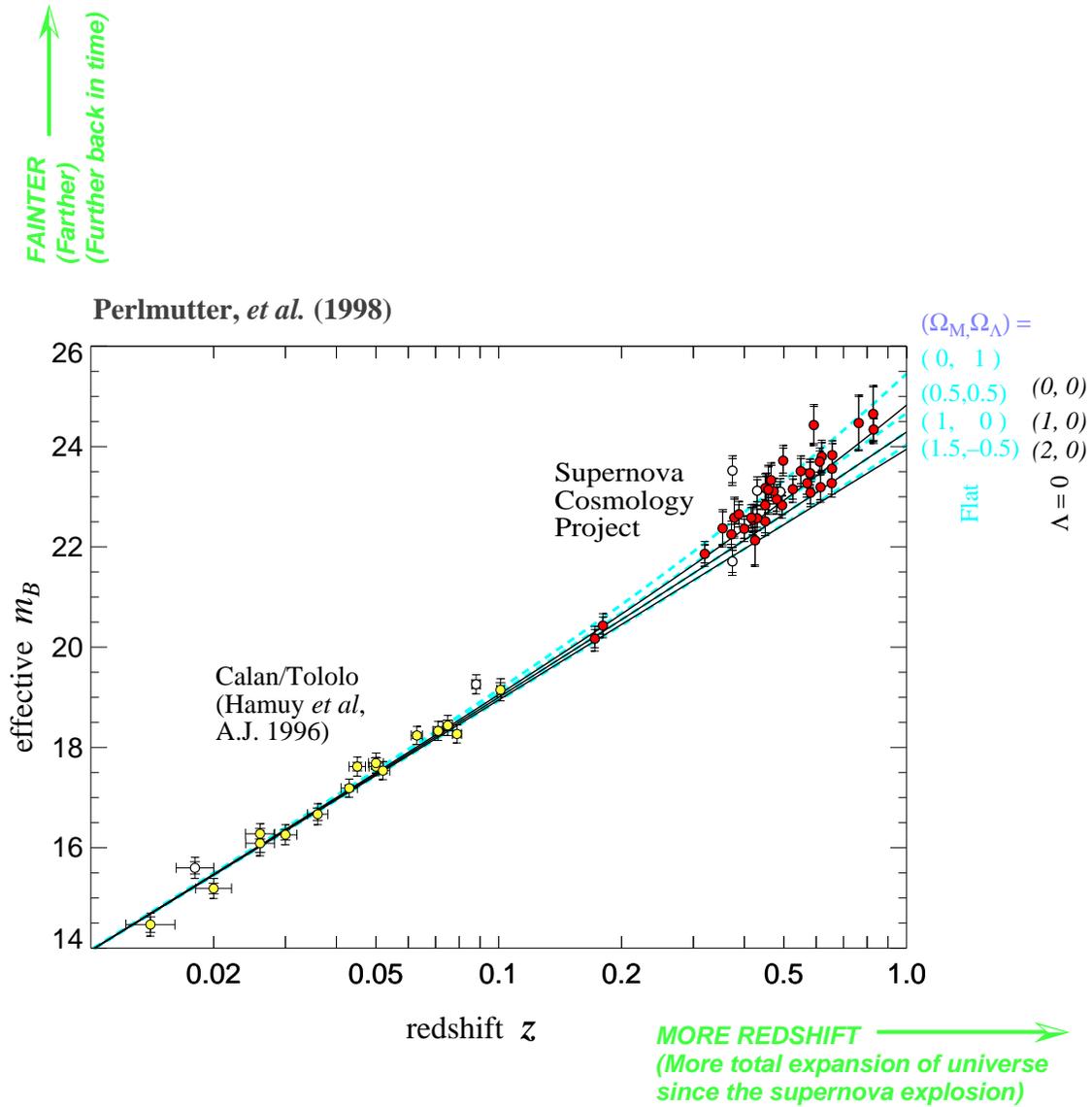
Die genannten Beobachtungen werden gestützt von anderen Beobachtungen, die physikalisch unabhängige Methoden nutzten und beispielsweise durch Untersuchungen von Galaxienhaufen zu einem Wert  $\Omega_M \sim 0,3 \pm 0,1$  kommen.

Dies alles spricht für einen Wert für die kosmologische Konstante von ([1])

$$\Omega_\Lambda \sim \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

Jedoch darf nicht verschwiegen werden, daß die Interpretation der Ergebnisse etwa der beiden Typ-Ia-Supernovae Gruppen nicht von allen geteilt werden. Effekte, die nach Meinung von Kritikern vor allem unterschätzt wurden, sind vor allem die Absorption in der Ursprungsgalaxis (die sich damals in einem anderen Stadium ihrer Evolution befunden hat) und der Einfluß von Supernovae, die nicht vor dem Maximum ihrer Leuchtkraft entdeckt wurden [17].

<sup>5</sup>Bei kritischer Dichte  $\rho_{\text{krit}} = 3H_0^2/(8\pi G)$  und verschwindender kosmologischer Konstante liegt gerade flache Geometrie vor.



In flat universe:  $\Omega_M = 0.28 [\pm 0.085 \text{ statistical}] [\pm 0.05 \text{ systematic}]$

Prob. of fit to  $\Lambda = 0$  universe: 1%

Abbildung 5: Hubble Diagramm mit 42 Supernovae großer Rotverschiebung [15]

Supernova Cosmology Project  
Perlmutter *et al.* (1998)

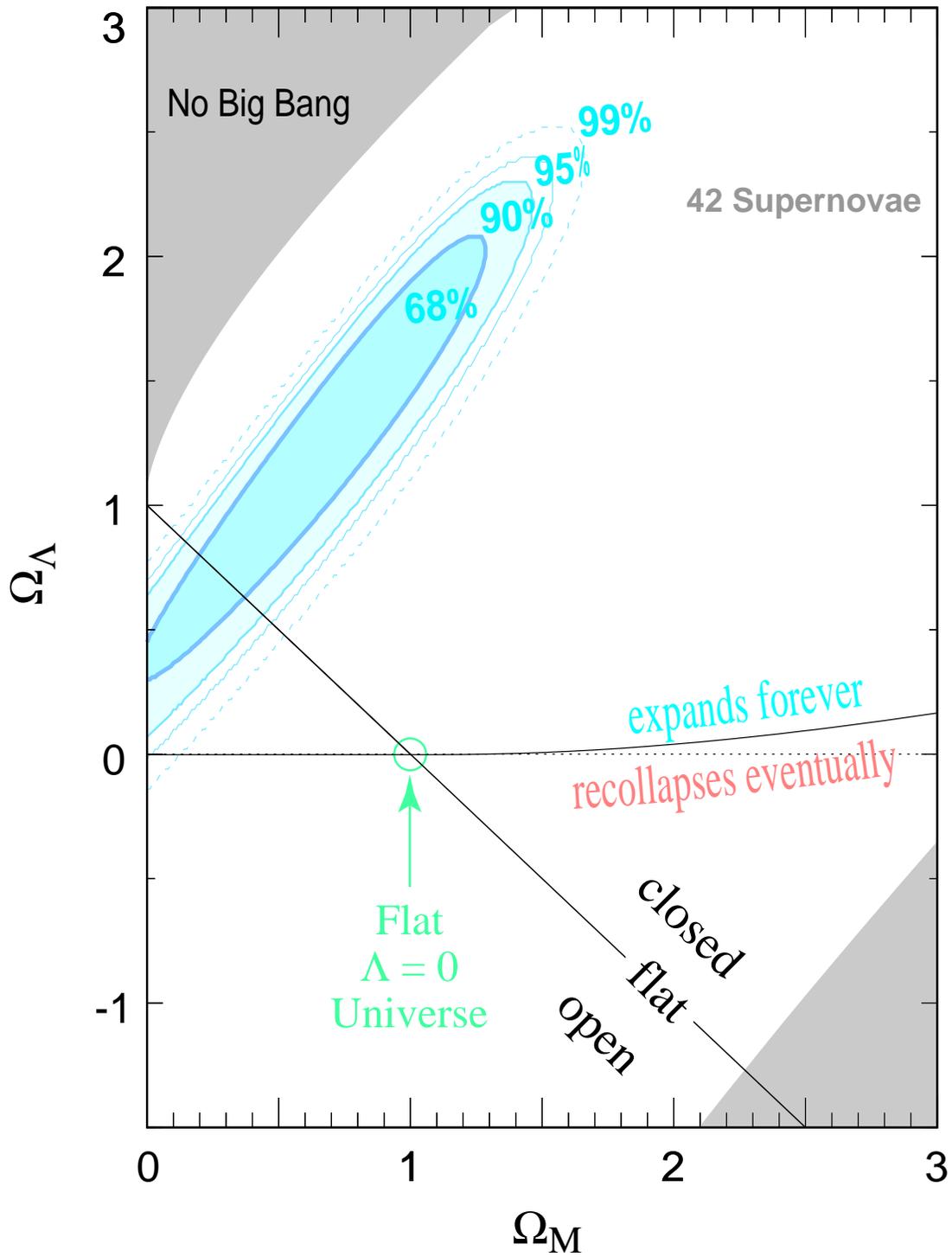


Abbildung 6: Vertrauensbereich für  $\Omega_\Lambda$  und  $\Omega_M$  [15]

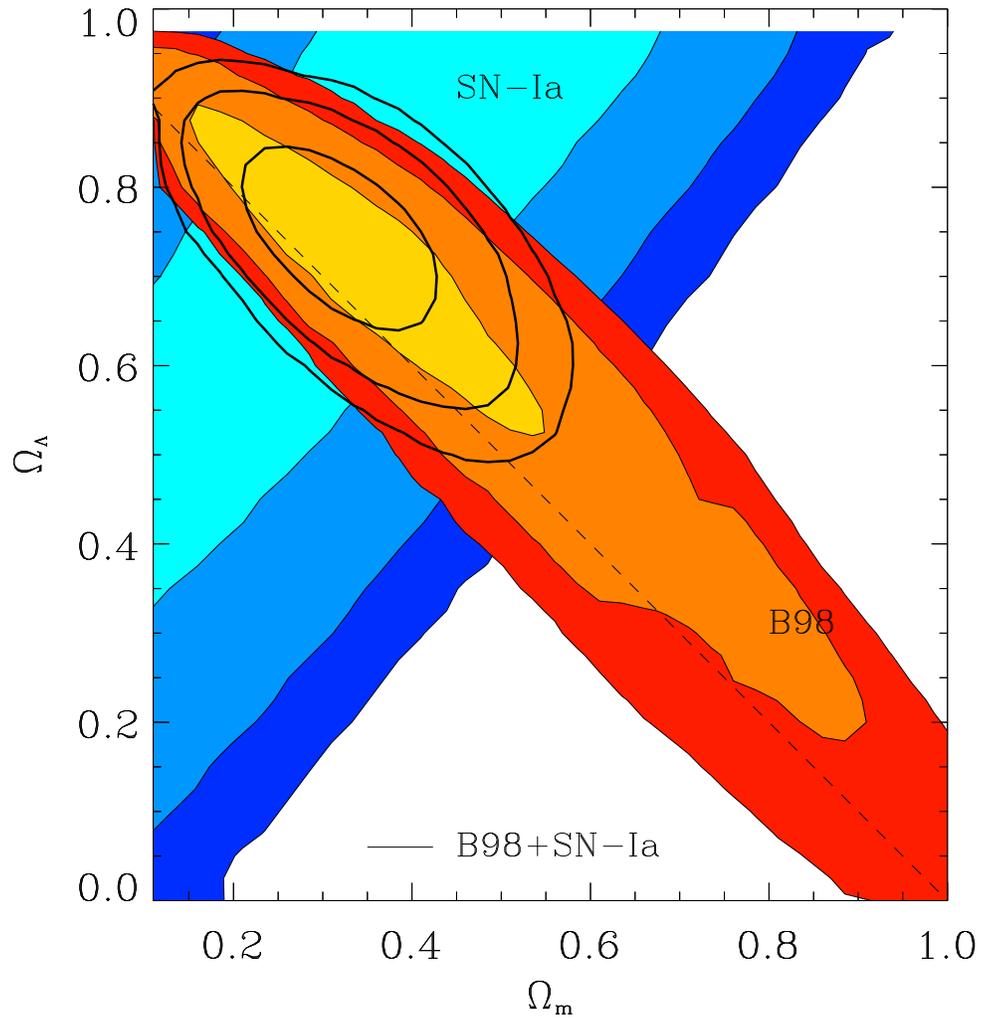


Abbildung 7: Einschränkungen für die  $\Omega_M$ - $\Omega_\Lambda$ -Ebene aus den Daten von BOOMERANG und COBE/DMR, zusammen mit den Daten aus den Typ-Ia-Supernovae Beobachtungen [16]

## 7 Fazit

Die gegenwärtig verfügbaren Daten legen nahe, daß wir uns in einem Universum befinden, welches nahezu flach ist und beschleunigt expandiert. Wahrscheinlich wirkt eine Art kosmologische Konstante, die dafür sorgt, daß die Dichte die kritische Dichte (welche Voraussetzung für ein flaches Universum ist) erreicht. Die Materiedichte allein erreicht nur etwa ein Drittel der kritischen Dichte und wird zudem größtenteils durch dunkle Materie erreicht, deren Natur noch im Dunklen liegt. Ebenso ist unklar, wodurch die kosmologische Konstante bestimmt wird. Zum einen läßt sie sich nicht durch die Vakuumenergiedichte der Quantenfeldtheorie deuten (diese läge etwa 120 Größenordnungen höher), zum anderen erscheint der Wert zu genau abgestimmt auf die kritische Dichte abgestimmt, als daß man dies ohne weitere Erklärungen als Zufall abtun könnte. Erklärungsansätze bestehen in Form des anthropischen Prinzips (beispielsweise in [8]) oder durch eine dynamische kosmologische „Konstante“, wie sie in Form der Quintessenz vorgeschlagen wird.

Man darf also gespannt sein.

## Literatur

- [1] D. Giulini, N. Straumann, *Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums*, Phys. Bl. 56 / November 2000, 41–48
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973
- [3] E. Schrödinger, *Expanding Universes*, Cambridge University Press, 1956
- [4] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1992
- [5] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1998
- [6] C. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973
- [7] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- [8] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. 61, 1–23, 1989
- [9] V. Sahni, *The Case for a Positive Cosmological  $\Lambda$ -term*, arXiv:astro-ph/9904398, April 2000
- [10] R. Kallosh, A. Linde, S. Prokushkin, M. Shmakova, *Gauged Supergravities, de Sitter Space and Cosmology*, arXiv:hep-th/0110089, Oktober 2001
- [11] M. Spradlin, A. Strominger, A. Volovich, *Les Houches Lectures on De Sitter Space*, arXiv:hep-th/0110007, September 2001
- [12] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics and Particle Creation*, Phys. Rev. D 15, 2738, 1977
- [13] C. J. Hogan, R. P. Kirshner, N. B. Suntzeff, *Die Vermessung der Raumzeit mit Supernovae*, Spektr. d. Wissenschaft / März 1999, 40–45
- [14] L. W. Krauss, *Neuer Auftrieb für ein beschleunigtes Universum*, Spektr. d. Wissenschaft / März 1999, 47–53
- [15] SCP-Homepage: <http://www-supernova.LBL.gov>
- [16] S. Masi et al., *The BOOMERanG experiment and the curvature of the Universe*, arXiv:astro-ph/0201137, Januar 2002
- [17] M. Rowan-Robinson, *Do Type I Supernovae prove  $\Lambda > 0$  ?*, arXiv:astro-ph/0201034, Januar 2002